**Лекция 15**

*Уравнения Лагранжа II рода (и их инвариантность)*

Рассматриваем систему из материальных точек массы , . Все стесняющие движение системы связи – независимые голономные и идеальные. - число степеней свободы положения, - независимые обобщенные координаты, определяющие положение системы. В силу независимости предполагаем , а далее и получаем *уравнения Лагранжа второго рода*: .

При наличии потенциала у всех сил, действующих на точки системы, обобщённые силы можно вычислить: , где – потенциальная энергия системы. Введя в рассмотрение *функцию Лагранжа,* получаем . Учитывая , переписываем уравнения Лагранжа второго рода:

.

Уравнения Лагранжа второго рода инвариантно относительно какого-то класса преобладаний, если каждое преобразование этого класса не изменяет функцию Лагранжа *L* (соответственно, кинетическую энергию *T* и обобщенные силы )

*Разрешимость уравнений Лагранжа II рода относительно старших производных*

Рассмотрим кинетическую энергию механической системы в декартовых координатах:.

Из равенства получаем:

где

Используя эти формулы, уравнение Лагранжа переписывается в виде:

где не зависят от обобщённых ускорений . Далее становиться понятно, что для доказательства разрешимости уравнений Лагранжа второго рода относительно обобщенных ускорений достаточно доказать: .

*Обобщенный потенциал и уравнения Лагранжа II рода*

Обобщённый потенциал – функция обобщённых координат, обобщённых скоростей и времени. Эта функция связана c обобщёнными силами равенствами:

, при существовании такой функции.

Далее складываем эти уравнения с уравнениями Лагранжа второго рода для всех и получаем уравнения Лагранжа второго рода для случая обобщённого потенциала: обобщённый потенциал.

При отсутствии зависимости обобщённого потенциала от обобщённых скоростей он является обычным потенциалом. При наличии линейной зависимости обобщённого потенциала от обобщённых координат квадратичная по обобщенным скоростям часть функции совпадает с квадратичной по обобщенным скоростям частью кинетической энергии, поэтому в этом случае доказательство разрешимости уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений подходит и для уравнений .

*Уравнения Лагранжа первого рода и реакции идеальных связей*

Рассмотрим систему, состоящую из материальных точек.

Обозначим:

координаты *j*-той точки

;

проекции главного вектора внутренних и внешних активных сил действующих на *j* -ую точку ;

проекции главного вектора реакций связей, действующих на *j* -ую точку

;

масса *j* -ой точки

.

Выразим уравнение Ньютона в данных обозначениях: .

Далее работаем в предположении, что движение системы ограничено следующими независимыми связями , - функции аргументов .

Пусть все связи идеальные. Воспользуемся общим уравнением механики, которое в принятых обозначениях выглядит так:

.

Вариации не являются независимыми, голономные связи налагают на них следующие условия

Неголономные связи накладывают на вариации условия:

Из вышеописанных уравнений, вариаций можно выразить через остальные 3N −k−r , которые можно считать независимыми.

Подставляя выражения зависимых вариаций через независимые в уравнение оно становится линейной комбинацией независимых вариаций. Затем, приравнивая нулю последовательно все независимые вариации, за исключением одной, получим уравнения движения.   
Этот способ использования общего уравнения механики для получения уравнения движения механической системы со связями является естественным и применяется как в теории, так и при решении практических задач. С другой стороны, в общем случае исключение зависимых вариаций можно выполнять более удобным способом – методом множителей Лагранжа.

Введем дополнительных переменных - функций времени (множители Лагранжа).

Умножив -ое равенство при на и – ое уравнение на при и вычитая все полученных равенств из уравнения , получаем уравнение

Далее выберем величин так, чтобы множители при зависимых вариациях . В этом случае и множители при остальных независимых вариациях также должны быть равны нулю. Таким образом поучим уравнений

Это уравнение, вместе с уравнениями и на при образуют систему из неравенств относительно неизвестных . Это и есть уравнения Лагранжа первого рода.

Далее получаем равенства, определяющие реакции связей при условии их идеальности:

.